EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2018/2019
(SEGUNDA FASE)

EXAME PARA PORTADORES DE DIPLOMA DE NÍVEL SUPERIOR 2018/2019

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

01/07/2018

Nome Completo: ____

Documento de Identidade: ______________________________________

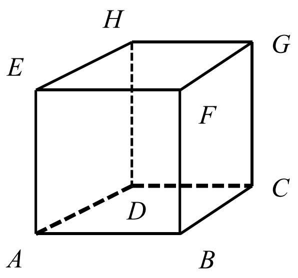
Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

1. **SOMENTE INICIAR A PROVA QUANDO FOR AUTORIZADO PELO FISCAL DE SALA**.
2. A prova tem **18 páginas**, incluindo a página de rosto. O espaço em branco que segue cada uma das **09 questões** é para a sua resolução. A página **18** é para **RASCUNHO** e não será considerada na correção.
3. Verificar se o seu **nome** e a sua **opção de curso** estão corretos na etiqueta de identificação da prova.
4. Não esquecer de identificar a página de rosto da prova, colocando seu nome completo (sem abreviações), o número do seu documento de identidade e a sua assinatura nos locais indicados.
5. **NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA OU CELULAR DURANTE A PROVA**. O USO DESSES APARELHOS PODERÁ IMPLICAR A DESCLASSIFICAÇÃO SUMÁRIA DO CANDIDATO (***DEIXAR O CELULAR DESLIGADO!!!***).
6. Não é permitido o uso de outros materiais estranhos à prova.
7. A prova é para ser resolvida à **caneta** (azul ou preta), com exceção dos desenhos técnicos.
8. Qualquer dúvida faz parte da interpretação do enunciado da questão.
9. Duração da prova: **3 horas**. Saída permitida a partir das **15h00min**.
10. Não é permitido fumar no local de exame.

Gabarito

1) A figura abaixo representa um cubo de vértices *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, e de lado igual a 6.



a) Considere em E^3 o sistema de coordenadas, baseado na figura acima, $\Sigma = (A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH})$. Determine uma equação geral do plano que passa pelo ponto D, e contém a reta $r: x + 2 = \frac{y-4}{-3} = \frac{z+2}{2}$

b) Considere, em V^3, a base positiva $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{HA})$, baseada na figura acima, e os vetores: $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{EA}$. Calcule o produto misto, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\,]$.

RESPOSTA:

(a) Primeiramente, vamos encontrar as coordenadas do ponto D. Para isso, vamos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AD}$ na base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AH})$.

Assim $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$.

Portanto, $D = (1, -1, 1)_\Sigma$.

Da equação da reta r obtemos os pontos:
$M = (-2, 4, -2)_\Sigma$ e $N = (-1, 1, 0)_\Sigma$.

Vamos usar os vetores:
$\overrightarrow{MN} = (1, -3, 2)$ e $\overrightarrow{ND} = (2, -2, 1)$ como diretores do plano procurado.

Um ponto $X = (x, y, z)_\Sigma$ pertencerá ao plano procurado se e somente se os vetores $\overrightarrow{NX} = (x + 1, y - 1, z)$, $\overrightarrow{ND}$ e $\overrightarrow{MN}$ forem linearmente dependentes, isto é, se e somente se

$$det \begin{bmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 0.$$

Dessa forma, uma equação geral para o plano procurado é: $x + 3y + 4z - 2 = 0$.

(b) O produto misto é, por definição, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Para calculá-lo, precisamos determinar os ângulos: θ, entre os vetores $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$, e $\propto$, entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, pois:
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos\theta = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \propto \|\vec{w}\| \cos\theta$.

Dos dados do problema, vemos que os vetores $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

Agora, a base dada está na orientação da regra da mão esquerda, então o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tem o mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{AE}$.

Dessa forma, $\theta = \pi$.

Como a base do cubo é um quadrado, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é $\pi/4$.

Portanto, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \frac{1}{3} \|\overrightarrow{AC}\| \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| \sin \frac{\pi}{4} \|\overrightarrow{EA}\| \cos \pi$.

Agora, pelo Teorema de Pitágoras, calculamos

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Finalmente, $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -36$.

2) Responda o que é pedido.

a) Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear definida por:

$T(1,0,0) = (1,3,1,0)$, $T(0,1,0) = (1,1,3,0)$ e $T(0,0,1) = (1, a, b, 0)$.

Determine todos os valores de a e de b para que a transformação T seja injetora.

b) Considere a matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Determine todos os números reais k para que a matriz A seja diagonalizável.

RESPOSTA:

(a) A transformação linear será injetora se e somente se o seu *kernel* tiver dimensão igual a 0.

Pelo teorema do Núcleo e da Imagem, sabemos que $dim\mathbb{R}^3 = \dim Ker(T) + \dim Im(T)$.

Como queremos $\dim Ker(T) = 0$, devemos ter $dimIm(T) = dim\mathbb{R}^3 = 3$.

Pelos dados do problema, o conjunto de vetores $\{(1,3,1,0), (1,1,3,0), (1, a, b, 0)\}$ gera a imagem de T.

Portanto, vamos encontrar os valores de a e de b para os quais esse conjunto é linearmente independente.

Para isso, vamos usar a técnica do escalonamento dos vetores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & b & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & b-1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a+b-4 & 0 \end{pmatrix}$$

O escalonamento nos mostra que os vetores serão *l.i* se e somente se $a + b - 4 \neq 0$.

Portanto, a transformação linear será injetora se e somente se $a + b \neq 4$.

(b) Vamos, em primeiro lugar, calcular o polinômio característico da matriz dada:

$$p_A(t) = det\begin{pmatrix} 1-t & 1 & k \\ 0 & 1-t & k \\ 0 & 1 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)(t^2 - 2t - k + 1).$$

Os autovalores de A são as raízes reais do seu polinômio característico, que são: 1, $1 + \sqrt{k}$ e $1 - \sqrt{k}$, se $k \geq 0$. Observamos que se $k > 0$, o polinômio característico terá três raízes reais e distintas; portanto, a matriz será diagonalizável nesse caso. No caso em que $k = 0$, temos o autovalor 1 com multiplicidade algébrica igual a 3, e a matriz fica :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos achar a multiplicidade geométrica, que é a dimensão de $Ker(A - I)$, do autovalor 1.

Assim, $(x, y, z) \in Ker(A - I)$ se e só se $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow y = 0,$

o que nos diz que $Ker(A - I) = \{(x, y, z): y = 0\}$ que é um subespaço de dimensão igual a 2 e, portanto, nesse caso as multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor 1 são diferentes e a matriz A não é diagonalizável para k=0.

Concluindo, a matriz será diagonalizável se e somente se $k > 0$.

3) Considere, em $\mathbb{R}^3$, o produto interno usual $<(x,y,z),(a,b,c)> = ax+by+cz$, para todos $(x,y,z),(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+2y+2z=0\}$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine uma base do complemento ortogonal, $S^\perp$, de S em $\mathbb{R}^3$.

b) Se $v \in S$ e $w \in S^\perp$ são tais que $v + w = (1,1,1)$, determine o vetor v.

RESPOSTA:

(a) Observemos que o subespaço dado representa um plano em $\mathbb{R}^3$.

Portanto, uma base de seu complemento ortogonal é formada por um vetor normal a esse plano.

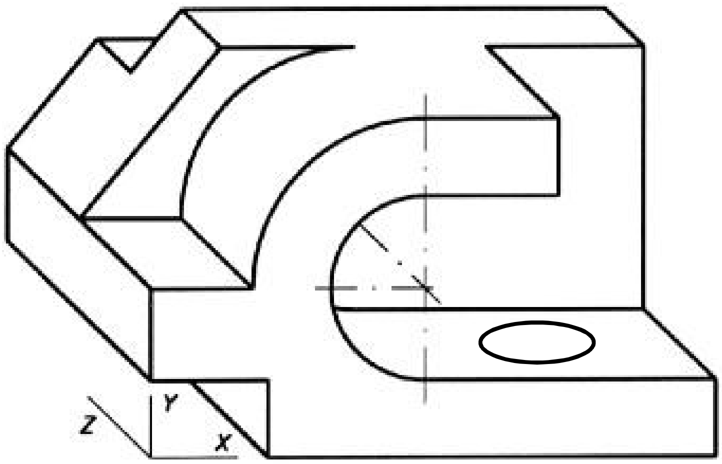
Dos dados do problema, temos que um vetor normal ao plano é $n = (1,2,2)$ e, assim, uma base para $S^\perp$ é $\{(1,2,2)\}$.

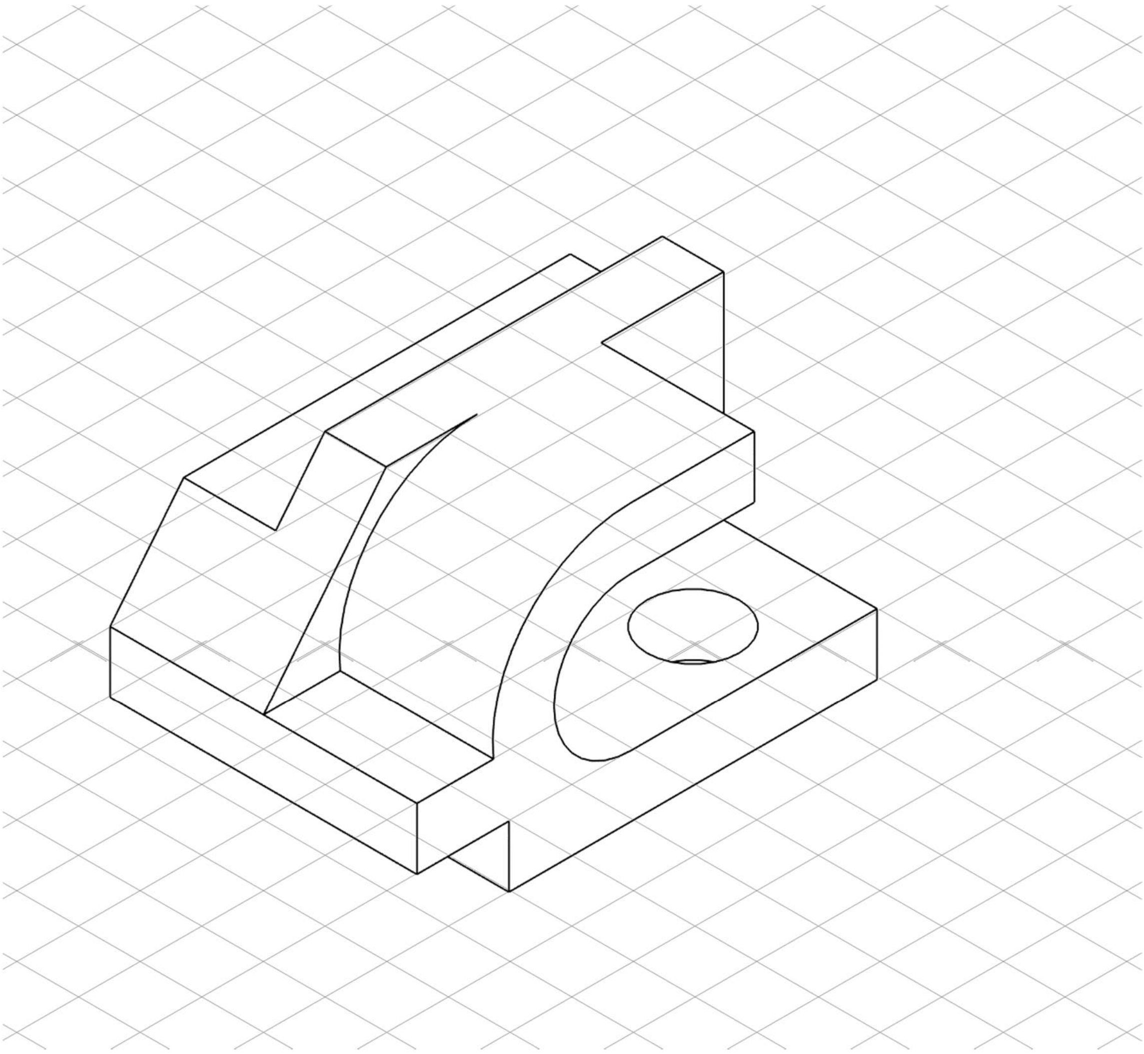
(b) O vetor procurado é a projeção ortogonal de (1,1,1) em *S*, e o vetor *w* é a projeção ortogonal de (1,1,1) em $S^\perp$, que é a $proj_n(1,1,1)$.

Assim, $w = proj_n(1,1,1) = \frac{1}{9} < (1,1,1),\ (1,2,2) > (1,2,2) = \frac{5}{9}(1,2,2)$ e, então,

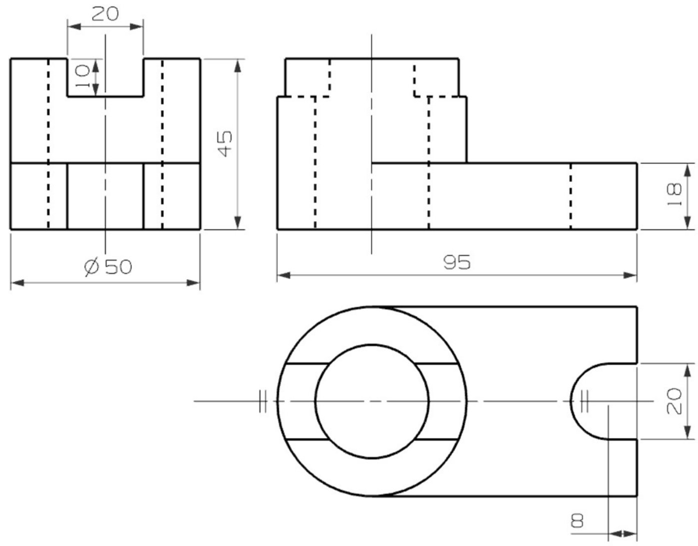
$$v = (1,1,1) - \frac{5}{9}(1,2,2) = \frac{1}{9}(\,4,-1,-1).$$

4) Usando as técnicas de esboço, desenhe a peça abaixo em **PERSPECTIVA ISOMÉTRICA**, mostrando as faces: **Frontal**, **Lateral Esquerda** e **Superior**. Observe que a peça está representada pela perspectiva cavaleira, com α=45° e k=1/2. O furo é passante e está centralizado. *Cada centímetro na cavaleira = 1 unidade no grid.*

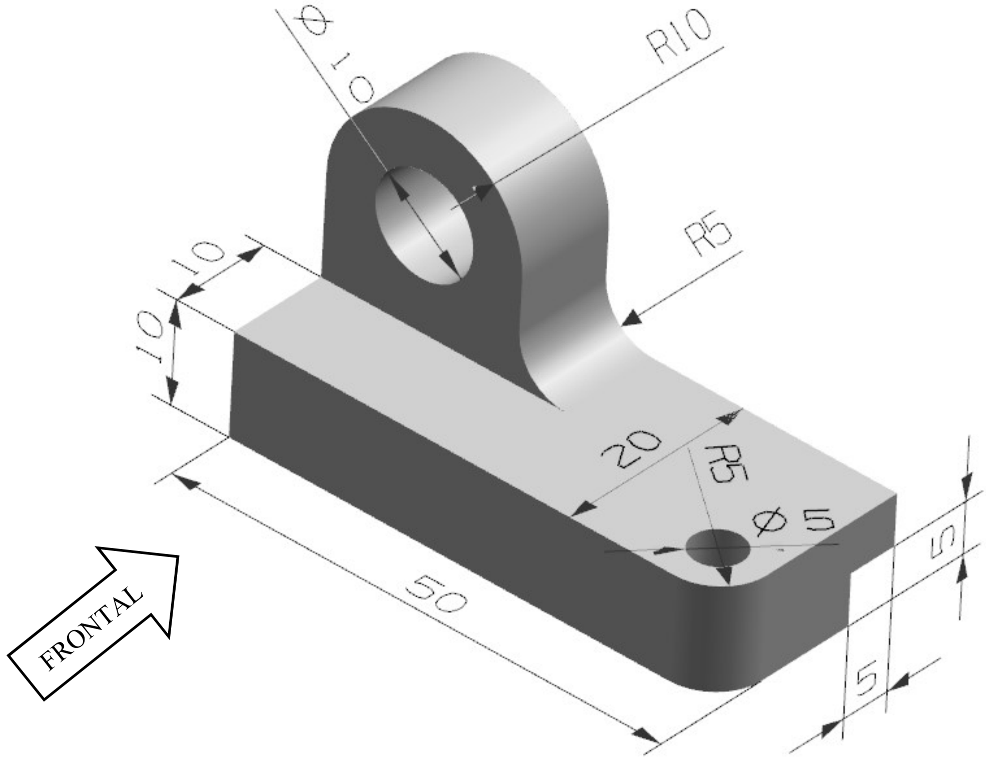




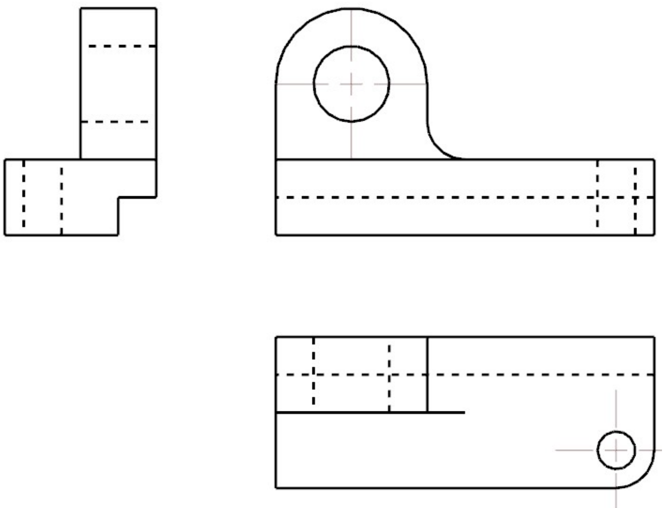
5) Cote as vistas dadas abaixo em **escala 1:2**, medindo-as diretamente no desenho, em mm.



6) Desenhar as vistas frontal, superior e lateral direita (1º diedro) da peça representada abaixo. Não é preciso cotar. Medidas em mm.



RESPOSTA:



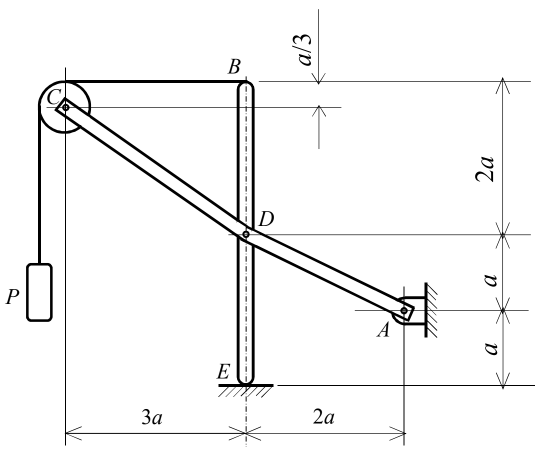
7) A estrutura abaixo é formada pelas barras *AC* e *BE*, ambas contínuas, de peso desprezível, e unidas por um pino em *D*. Por uma articulação em *C* acopla-se uma polia ideal sobre a qual se enrola um cabo também ideal, o qual é preso ao ponto *B* e sustenta uma carga de peso *P*. São dadas as dimensões indicadas na figura. Sabe-se que em *E* a barra *BE* faz contato com uma superfície rugosa cujo coeficiente de atrito μ (desconhecido) é capaz de manter o sistema em equilíbrio. Pede-se:

(a) os diagramas de corpo livre das barras e da polia;

(b) a reação vincular em *A*;

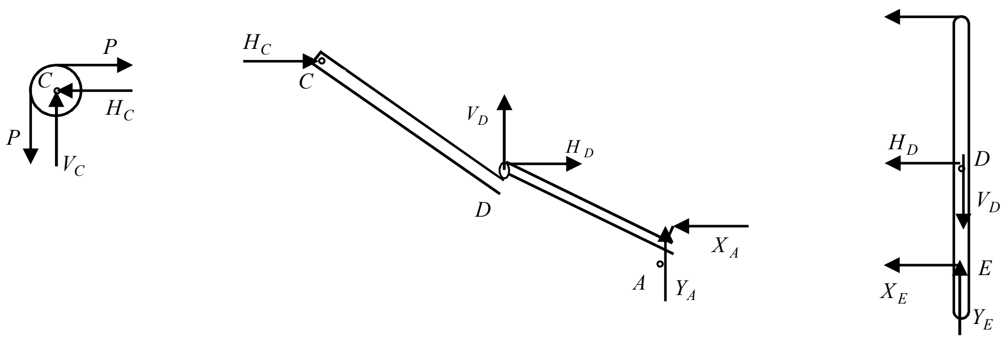
(c) o mínimo valor do coeficiente de atrito μ compatível com a situação proposta.

Obs.: desenho fora de escala.



RESPOSTA:

(a)



(b) Do equilíbrio da polia: $H_C = P$ e $V_C = P$ (1)

Para a barra BE:

$\sum M_D = 0 \Rightarrow X_E = P$ (2)

$\sum F_x = 0 \Rightarrow -P - H_D - X_E = 0 \Rightarrow H_D = -2P$ (3)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_E = V_D$ (4)

Para a barra AC:

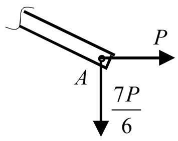
$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_C + H_D - X_A = 0$

Usando (1) e (3): $P - 2P - X_A = 0 \Rightarrow \boxed{X_A = -P}$ (5)

$\sum M_A = 0 \Rightarrow -H_C \cdot \frac{8a}{3} + V_C \cdot 5a - V_D \cdot 2a - H_D \cdot a = 0 \Rightarrow -P \cdot \frac{8a}{3} + P \cdot 5a - V_D \cdot 2a + 2P \cdot a = 0 \Rightarrow V_D = \frac{13P}{6}$
(6)

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V_C + V_D + Y_A = 0 \Rightarrow -P + \frac{13P}{6} + Y_A = 0 \Rightarrow \boxed{Y_A = -\frac{7P}{6}}$

Assim, as reações em A serão:



(c) No limite de escorregamento em E teremos: $X_E = \mu Y_E$

Usando (2), (4) e (6):

$P = \mu \frac{13P}{6} \Rightarrow \boxed{\mu_{\min} = \frac{6}{13}}$

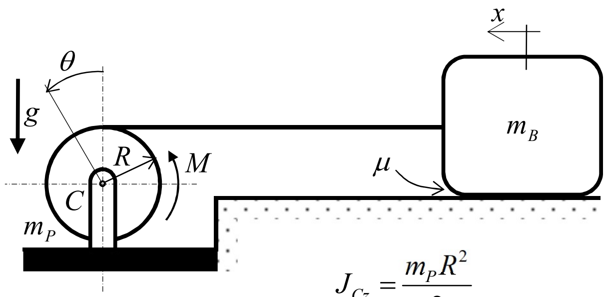
8) Um bloco de massa m_B escorrega sobre o plano horizontal com coeficiente de atrito μ. O bloco está ligado a um cabo ideal cuja extremidade está presa na polia de massa m_P e raio *R*, cujo centro C é vinculado ao solo por meio de articulação sem atrito. No instante inicial, quando o sistema está em repouso, é aplicado um momento de binário *M* (constante) na polia de centro C, suficiente para acelerar o bloco.

Sabe-se que a origem de *x* é tal que $x = 0$ para $\theta = 0$.

Pede-se:

a) determine a energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ da polia de centro C;

b) determine velocidade angular ω da polia de centro *C* em função de θ.



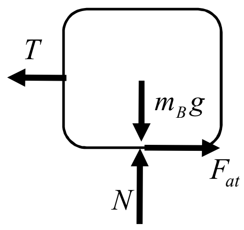
$$J_{Cz} = \frac{m_P R^2}{2}$$

RESPOSTA:

(a) Da geometria do sistema observa-se que $x = R\theta$, e que $\dot{x} = v = R\dot{\theta} = R\omega$.

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\substack{\text{bloco} \\ \text{translação}}} + \underbrace{\frac{1}{2}J_{Cz}\omega^2}_{\substack{\text{polia} \\ \text{rotação c/ eixo fixo}}} = \frac{1}{2}m_B(R\omega)^2 + \frac{1}{2}\frac{m_P R^2}{2}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{R^2\omega^2}{4}(m_P + 2m_B)}$$

(b) Diagrama de corpo livre do bloco: ..



Na direção da normal:
$m_B a_N = N - m_B g = 0 \quad \Rightarrow \quad N = m_B g$

Como há escorregamento:
$F_{at} = \mu N \quad \Rightarrow \quad F_{at} = \mu m_B g$

Trabalho do momento de binário: $W_M = M\theta$

Trabalho da força de atrito: $W_A = F_{at}x = -\mu m_B g \theta R$

(a força de atrito tem sentido oposto ao do deslocamento)

Trabalho da força peso: $W_P = 0$
(não há deslocamento na direção vertical)

Nesse sistema o trabalho das forças internas é nulo.

Teorema da energia cinética (parte do repouso):

$$E_f - E_i = W_{EXT} \quad \Rightarrow \quad \frac{R^2\omega^2}{4}\left(m_P + 2m_B\right) = M\theta - \mu m_B g\theta R$$

$$\omega^2 = \frac{4}{R^2\left(m_P + 2m_B\right)}\left(M - \mu m_B gR\right)\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{4\left(M - \mu m_B gR\right)}{R^2\left(m_P + 2m_B\right)}\theta}}..$$

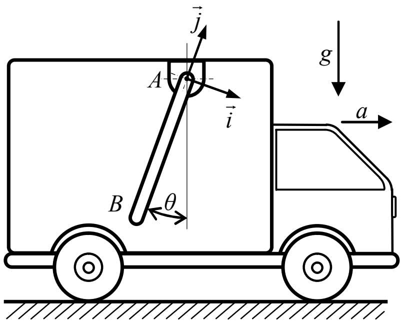
9) O caminhão movimenta-se para a direita com aceleração $\vec{a}$ constante e conhecida. A barra *AB*, de massa *m* e comprimento L, está articulada em A, sem atrito. Utilizando a base solidária à barra *AB* representada na figura, pede-se:

a) o diagrama de corpo livre da barra;

b) o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ da barra em função de a e θ;

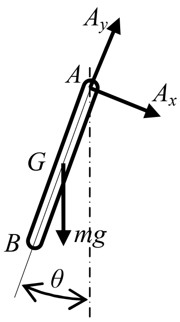
c) as reações A_x e A_y da articulação *A* sobre a barra em função de θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.

Dado: $J_{Gz} = \dfrac{mL^2}{12}$



RESPOSTA:

a) diagrama do corpo livre para barra AB:



b) TQMA, polo A (acelerado); problema plano; $\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$

$$\vec{M}_A^{ext} = m(G-A)\wedge \vec{a}_A + J_{Az}\alpha \vec{k} \Rightarrow mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta \vec{k} = -m\frac{L}{2}\vec{j}\wedge a\left(\cos\theta \vec{i} + sen\theta \vec{j}\right) + m\frac{L^2}{3}\alpha \vec{k} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{3}{2L}\left(g\operatorname{sen}\theta - a\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \frac{3}{2L}\left(g\operatorname{sen}\theta - a\cos\theta\right)\vec{k}}$$

c) TMB:

$$ma_{Gx} = A_x + mg\operatorname{sen}\theta$$

$$ma_{Gy} = A_y - mg\cos\theta$$

A aceleração de G é dada por $\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$; $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$; $\vec{\alpha} = -\ddot{\theta}\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{a}_G = a(\cos\theta\vec{i} + sen\theta\vec{j}) + -\ddot{\theta}\vec{k} \wedge -\frac{L}{2}\vec{j} + -\dot{\theta}\vec{k} \wedge \left[-\dot{\theta}\vec{k} \wedge -\frac{L}{2}\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = \left(a\cos\theta - \ddot{\theta}\frac{L}{2}\right)\vec{i} + \left(asen\theta + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\right)\vec{j}}$$

Substituindo:

$$m\left(a\cos\theta - \ddot{\theta}\frac{L}{2}\right) = A_x + mg\text{sen}\theta \Rightarrow \boxed{A_x = m\left(a\cos\theta - \ddot{\theta}\frac{L}{2}\right) - mg\text{sen}\theta}$$

$$m\left(a\text{sen}\theta + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\right) = A_y - mgcos\theta \Rightarrow \boxed{A_y = m\left(a\text{sen}\theta + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\right) + mgcos\theta}$$