Prova A

EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2022/2023
(SEGUNDA FASE)

EXAME PARA PORTADORES DE DIPLOMA DE NÍVEL SUPERIOR 2022/2023

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

11/09/2022

Nome Completo: ____

Documento de Identidade: ______________________________________

Assinatura: ____

INSTRUÇÕES

1. **SOMENTE INICIAR A PROVA QUANDO FOR AUTORIZADO PELO FISCAL DE SALA**.
2. A prova tem **20 páginas**, incluindo a página de rosto. O espaço em branco que segue cada uma das **09 questões** é para a sua resolução. A página **20** é para **RASCUNHO** e não será considerada na correção.
3. Verificar se o seu **nome** e a sua **opção de curso** estão corretos na etiqueta de identificação da prova.
4. Não esquecer de identificar a página de rosto da prova, colocando seu nome completo (sem abreviações), o número do seu documento de identidade e a sua assinatura nos locais indicados.
5. **NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA OU CELULAR DURANTE A PROVA**. O USO DESSES APARELHOS PODERÁ IMPLICAR A DESCLASSIFICAÇÃO SUMÁRIA DO CANDIDATO (***DEIXAR O CELULAR DESLIGADO!!!***).
6. Não é permitido o uso de outros materiais estranhos à prova.
7. A prova é para ser resolvida à **caneta** (azul ou preta), com exceção dos desenhos técnicos.
8. Qualquer dúvida faz parte da interpretação do enunciado da questão.
9. Duração da prova: **3 horas**. Saída permitida a partir das **15h00min**.
10. Não é permitido fumar no local de exame.

Gabarito

1) Seja V o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Sejam P o conjunto das funções pares contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e Q o conjunto das funções ímpares contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que quando P e Q são munidos das operações induzidas de V (soma de elementos, produto por escalar), eles se tornam subespaços vetoriais de V.

(b) Mostre que V pode ser expresso como a soma direta $V = P \oplus Q$.

RESPOSTA:

1a) Mostramos que P é um subespaço vetorial de V. A prova para Q é quase idêntica. Devemos mostrar que

i. A função nula pertence a P.

ii. $f, g \in P \Rightarrow f + g \in P$.

iii. $\alpha \in \mathbb{C}$, $f \in P$, implicam $\alpha f \in P$.

São verificações simples. A função nula é par. $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$, isto é, $(f+g) \in P$. Finalmente, $(\alpha f)(-x) = \alpha f(-x) = \alpha f(x) = (\alpha f)(x)$. Logo $\alpha f \in P$.

1b) Em primeiro lugar, mostramos que $P \cap Q = \{0\}$. De fato, se $f \in P \cap Q$, então $f(-x) = f(x)$ e $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e então $f = 0$. Em segundo lugar, mostramos que toda função em V pode ser expressa como uma soma de uma função par com uma ímpar. Seja $f \in V$. Basta escrevemos

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

2) Considere o $\mathbb{R}^3$ munido do produto escalar usual $< u, v > = \sum_{i=1}^{3} u_i\, v_i$. Os vetores de $\mathbb{R}^3$ seguintes estão representados na base canônica.

$$u_1 = (1, 2, 1), \quad u_2 = (-2, 1, 0), \quad u_3 = (1, 2, -5).$$

(a) Seja W o espaço vetorial gerado por u_1 e u_2. Determine a representação matricial, usando a base canônica, que corresponde ao operador projeção ortogonal $\text{Proj} : \mathbb{R}^3 \to W$.

(b) Sabendo-se que o ponto (0, 0, 0) pertence ao plano α paralelo aos vetores u_1 e u_2, forneça a equação que define os pontos pertencentes a α.

RESPOSTA:

2a) Por verificação direta, $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Todo vetor $v \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$. A projeção ortogonal sobre W pode ser expressa por $\text{Proj}(v) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.

Para determinarmos a representação matricial de Proj na base canônica, basta determinarmos as imagens dos vetores da base canônica.

$$\text{Proj}((1,0,0)) = (\frac{29}{30}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{6}).$$
$$\text{Proj}((0,1,0)) = (-\frac{1}{15}, \frac{13}{15}, \frac{1}{3}).$$
$$\text{Proj}((0,0,1)) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}).$$

Daí

$$[\text{Proj}] = \begin{bmatrix} \frac{29}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{15} & \frac{13}{15} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2b) O vetor u_3 é normal ao plano α. Daí temos a representação

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

3) Seja $P_2 = \{ \sum_{j=0}^{3} c_j\, x_j : c_j \,\epsilon\, \mathrm{C}\,,\; j = 0{,}1{,}2 \}$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Considere o operador linear $T : P_2 \to P_2$ dado por

$$(Tf)(x) = (1 + x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + f.$$

(a) Determine os autovalores de T.

(b) Determine os autovetores de T.

RESPOSTA:

3a) Usamos uma base, por exemplo, $(1, x, x^2)$, e obtemos a representação matricial de T. $T1 = 1$, $Tx = 1 + x$, $Tx^2 = 3x^2 + 2x + 2$.

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por inspeção direta vemos que os autovalores são $\lambda_1 = 1$ (dupla) e $\lambda_2 = 3$.

3b) Os autovetores da matriz $[T]$ são $(1,0,0)$ (corresp. à $\lambda_1 = 1$) e $(3,2,2)$ (corresp. à $\lambda_2 = 3$). Voltando ao espaço vetorial P_2, temos os autovetores

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 3 + 2x + 2x^2,$$

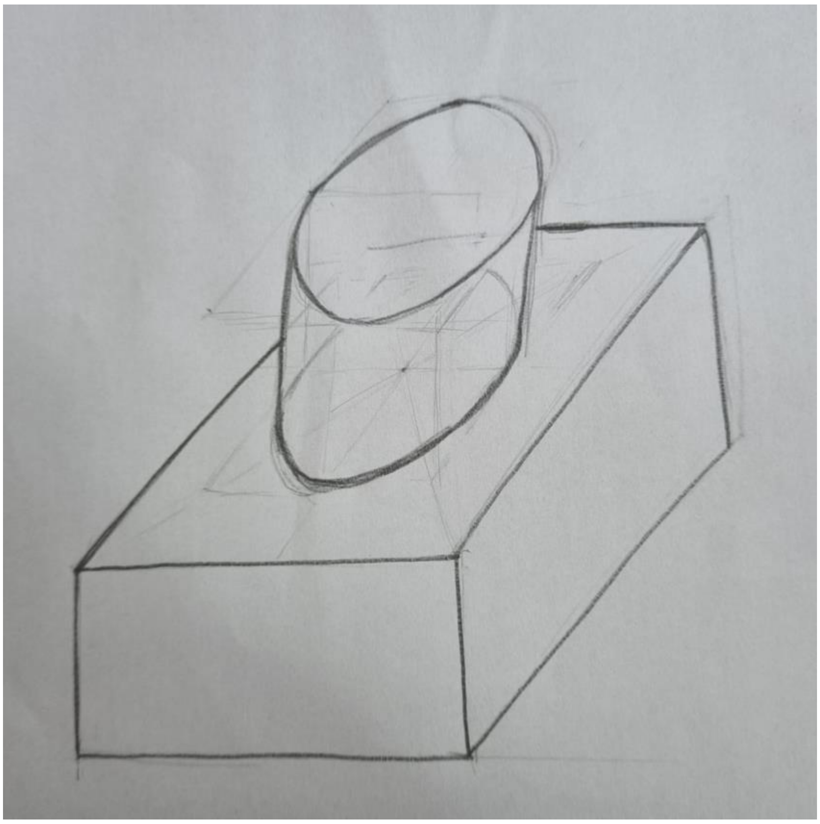
que correspondem respectivamente a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

4) Utilizando técnicas de esboço, faça um esboço (desenho à mão livre) do objeto descrito abaixo, usando **perspectiva cavaleira** (com ângulo das fugantes α=45° e coeficiente de deformação k=1).

OBJETO: um bloco (paralelepípedo) de base quadrada (L x L) e altura igual à metade do comprimento do lado da base (L/2), com um cilindro, de mesma altura (L/2) do bloco, centrado em sua face superior. O comprimento da base do bloco no desenho (L) deve ser aproximadamente do tamanho da metade da largura desta folha. O diâmetro do cilindro (D) deve ser maior que a metade lado da base do cubo (D > L/2).

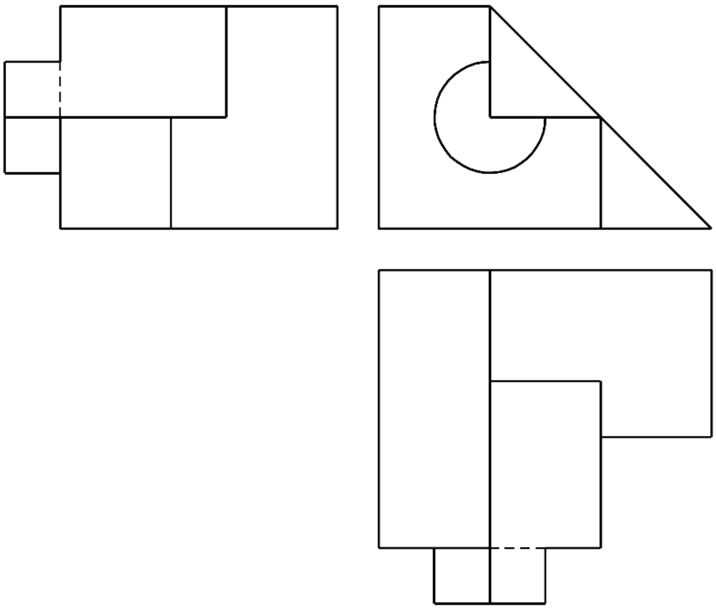
Nesta questão, não podem ser usados instrumentos (régua, compasso, esquadros, etc.) em nenhuma hipótese e de nenhuma maneira, pois está sendo avaliada sua habilidade de desenho à mão livre. Podem ser deixadas no desenho construções auxiliares em traço mais fraco, evidenciando o método de construção.

RESPOSTA:

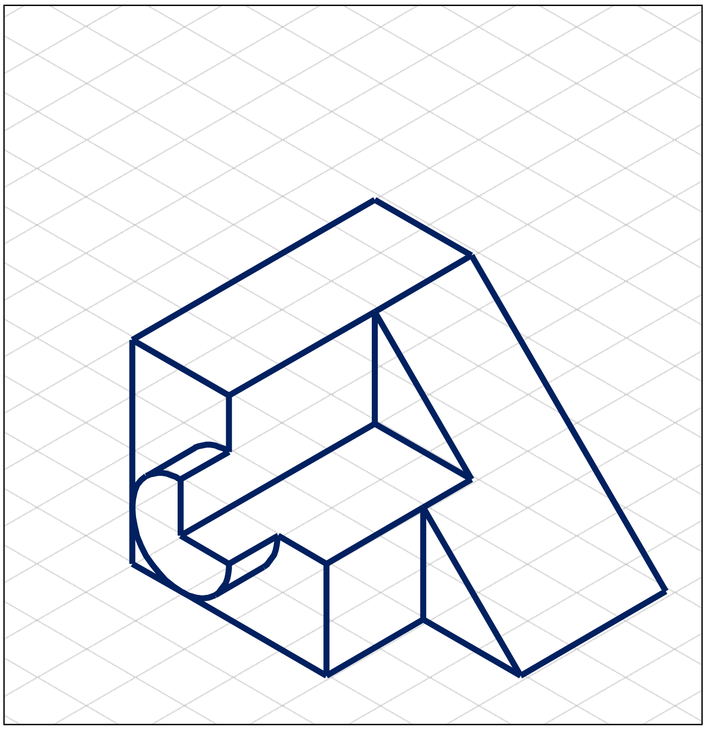


5) Desenhar a perspectiva **isométrica** da peça dada abaixo por suas vistas, representadas no primeiro diedro em escala natural. Posicionar a peça na grade isométrica mostrando suas faces superior, frontal e lateral direita.

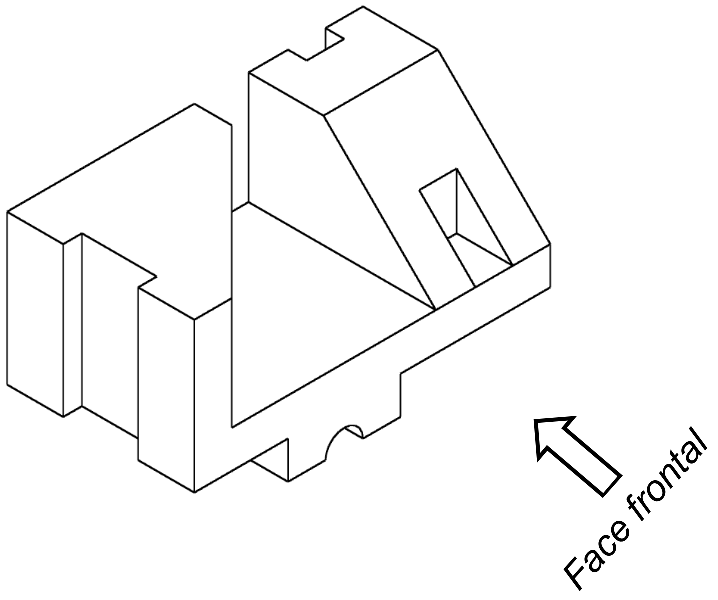
Desenhar a perspectiva em escala natural (1:1), tomando as medidas diretamente das vistas. Não é necessário desenhar as linhas ocultas nem cotar a perspectiva.



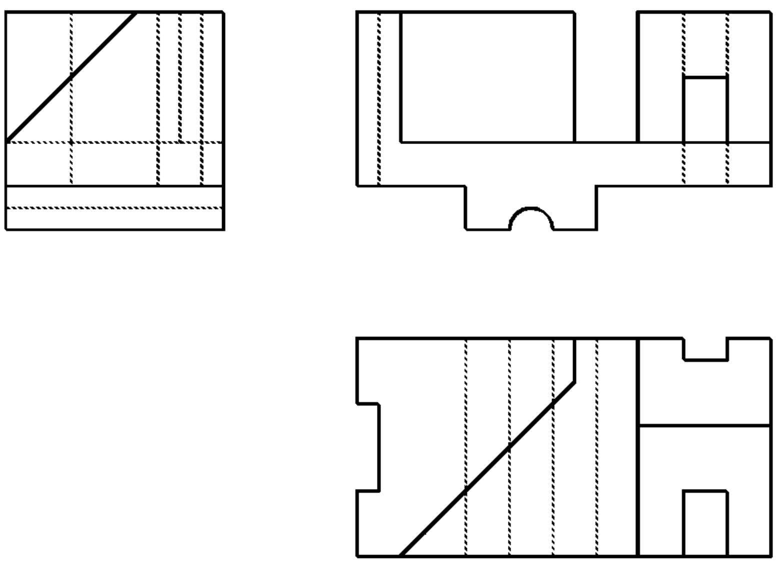
RESPOSTA:



6) Desenhe as vistas ortográficas frontal, superior e lateral direita da peça abaixo, no 1º diedro e em escala 1:1 (tome as medidas diretamente da perspectiva simplificada, que é dada na mesma escala). Não é necessário cotar as vistas.

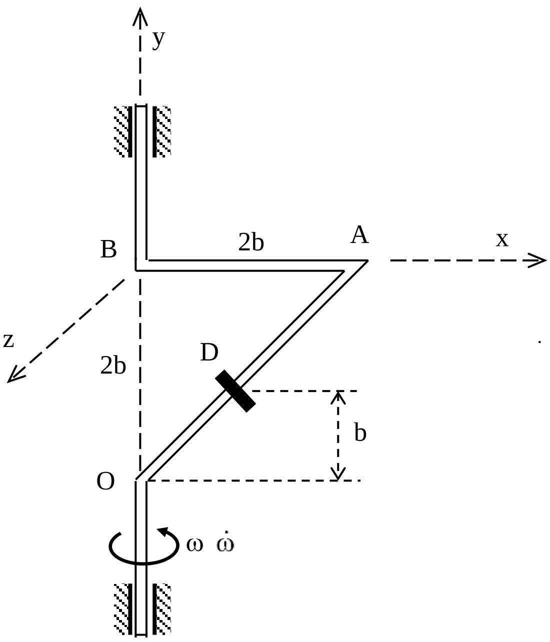


RESPOSTA:



7) A barra dobrada OAB gira em torno do eixo vertical OB com velocidade e acelerações angulares ω e $\dot{\omega}$, respectivamente, conforme indicado na figura. O anel D desloca-se ao longo da barra, com velocidade v e aceleração $\dot{v}$ relativas à barra, no sentido de O para A. Determine para a posição do anel mostrada na figura:

a) o vetor velocidade absoluta do anel;
b) o vetor aceleração absoluta do anel.



RESPOSTA:

a) Para o ponto D:

$$\vec{v}_{relativa} = v\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + v\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$\vec{v}_{arrastamento} = -\omega b\vec{k}$$

$$\vec{v}_{absoluta} = \vec{v}_{relativa} + \vec{v}_{arrastamento}$$

$$\vec{v}_{absoluta} = v\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + v\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \omega b\vec{k}$$

b) Para o ponto D:

$$\vec{a}_{relativa} = \dot{v}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \dot{v}\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$
$$\vec{a}_{arrastamento} = -\dot{\omega}b\vec{k} - \omega^2 b\vec{i}$$
$$\vec{a}_{Coriolis} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{relativa} = -2\omega v\vec{k}$$
$$\vec{a}_{absoluta} = \vec{a}_{relativa} + \vec{a}_{arrastamento} + \vec{a}_{Coriolis}$$

8) Duas esferas homogêneas, externamente idênticas, de igual raio e peso, sendo uma cheia e a outra oca, rolam num plano inclinado. Explique como pode ser identificado, utilizando os conceitos da Mecânica, qual é a esfera oca e qual a esfera cheia.

RESPOSTA:

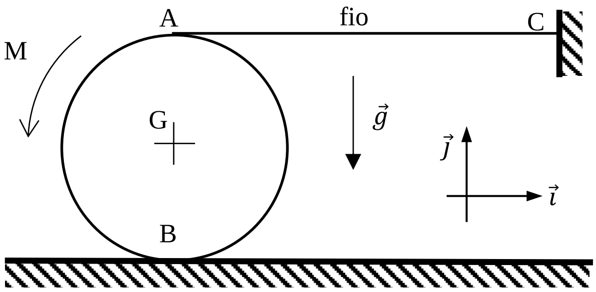
A esfera cheia possui um momento de inércia menor do que a esfera oca.

Quando colocadas num plano inclinado, a esfera cheia (com menor momento de inércia) rola com uma aceleração angular maior e consequentemente com velocidade angular maior.

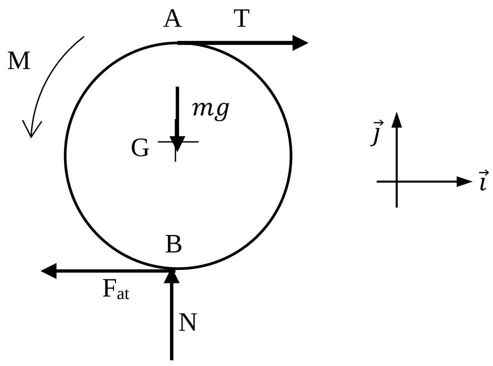
9) O disco de massa m e raio R está sobre um plano horizontal e possui enrolado sobre si um fio ideal. O fio, por sua vez, tem sua extremidade presa ao suporte fixo em C. O disco se movimenta acionado por um binário de momento M e ocorre escorregamento em B. Sabe-se que o coeficiente de atrito dinâmico entre o disco e o plano horizontal é μ. Para estas condições determine:

a) A aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco.
b) A aceleração do centro de massa G do disco.
c) A tração T no fio.

Dado: $J_G = mR^2/2$ (momento de inércia de um disco de raio R e massa m com relação a um eixo de direção normal ao plano do disco e que passa pelo seu baricentro G).



RESPOSTA:



T.M.B.

$$m\vec{a}_G = \vec{R}_{EXT}$$
$$m\vec{a}_G = (T - F_{at})\vec{i} + (N - mg)\vec{j}$$

Relação cinemática: $\vec{a}_G = \dot{\omega}R\vec{\imath}$

$m\dot{\omega}R\vec{\imath} = (T - F_{at})\vec{\imath} + (N - mg)\vec{\jmath}$

Assim:
$m\dot{\omega}R = (T - F_{at})$ (1)
$N = mg$

Escorregamento em B: $F_{at} = \mu N = \mu mg$ (2)

T.Q.M.A. polo em A:

$\dot{\vec{H}}_A = \vec{M}_A^{EXT}$

$J_A\dot{\omega}\vec{k} = M\vec{k} - 2RF_{at}\vec{k}$

$$J_A = J_G + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$\frac{3}{2}mR^2\dot{\omega} = M - 2R\mu mg$$

a) $\dot{\omega} = \frac{2}{3mR}\left(\frac{M}{R} - 2\mu mg\right)$ (3)

b) $\vec{a}_G = \dot{\omega}R\vec{\imath}$

$$\vec{a}_G = \frac{2}{3m}\left(\frac{M}{R} - 2\mu mg\right)\vec{\imath}$$

c) Usando (1), (2) e (3):

$$T = \frac{2M}{3R} - \frac{\mu mg}{3}$$