

**EXAME DE TRANSFERÊNCIA EXTERNA 2023/2024  
(SEGUNDA FASE)**



**EXAME PARA PORTADORES DE DIPLOMA DE  
NÍVEL SUPERIOR 2023/2024**

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA POLITÉCNICA**

**03/09/2023**

**Nome Completo:** \_\_\_\_\_

**Documento de Identidade:** \_\_\_\_\_

**Assinatura:** \_\_\_\_\_

**INSTRUÇÕES**

1. **SOMENTE INICIAR A PROVA QUANDO FOR AUTORIZADO PELO FISCAL DE SALA.**
2. A prova tem **20 páginas**, incluindo a página de rosto. O espaço em branco que segue cada uma das **09 questões** é para a sua resolução. A página 20 é para RASCUNHO e não será considerada na correção.
3. Verificar se o seu **nome** e a sua **opção de curso** estão corretos na etiqueta de identificação da prova.
4. Não esquecer de identificar a página de rosto da prova, colocando seu nome completo (sem abreviações), o número do seu documento de identidade e a sua assinatura nos locais indicados.
5. **NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA OU CELULAR DURANTE A PROVA.** O USO DESSES APARELHOS PODERÁ IMPLICAR A DESCLASSIFICAÇÃO SUMÁRIA DO CANDIDATO (***DEIXAR O CELULAR DESLIGADO!!!***).
6. Não é permitido o uso de outros materiais estranhos à prova.
7. A prova é para ser resolvida à **caneta** (azul ou preta), com exceção dos desenhos técnicos.
8. Qualquer dúvida faz parte da interpretação do enunciado da questão.
9. Duração da prova: **3 horas**. Saída permitida a partir das **15h00min**.
10. Não é permitido fumar no local de exame.

**Gabarito**

- 1) Considere o espaço vetorial  $\mathbf{P}_2$  dos polinômios de grau menor ou igual a dois e o operador  $T: \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$  definido por

$$(Tf)(x) = \int_0^1 ((1+x)s + x^2s^2)f(s)ds.$$

- (a) Determine as dimensões do núcleo e da imagem de  $T$ ,  $\dim \text{Ker}(T)$  e  $\dim \text{Im}(T)$ .  
(b) O operador  $T: \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$  é diagonalizável? (Resposta considerada apenas se justificada).
- 

**RESPOSTA:**

- 1a) Em  $\mathbf{P}_2$ , usamos a base  $\beta = \{e_0, e_1, e_2\}$ , em que  $e_0 = 1$ ,  $e_1 = x$ ,  $e_2 = x^2$ .

Após calcular  $Te_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , obtemos a representação matricial de  $T$  na base  $\beta$ , que é dada por

$$[T]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Por rápida inspeção, vemos que o posto da matriz é 2, que é menor que  $\dim \mathbf{P}_2 = 3$ . Logo, o operador linear  $T: \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$  não é sobrejetor, com  $\dim \text{Im}(T) = 2$ . Pelo teorema do núcleo e imagem, temos  $\dim \text{Ker}(T) = 1$

- 1b) O polinômio característico revela que ele possui um zero igual a zero e dois zeros reais e distintos. De fato, o polinômio característico é  $x \mapsto -(1/48) + (31x)/30 - x^2$ . Que um zero é zero é imediato. É também imediato que a equação de segundo grau  $-(1/48) + (31x)/30 - x^2 = 0$  tem discriminante positivo. Assim,  $T: \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2$  possui três autovalores reais e distintos, sendo portanto diagonalizável.

2) Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  munido de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  e  $T: V \rightarrow V$  um operador linear.

(a) Mostre que se  $\|Tv\| = \|v\|$ , então  $\langle Tv, Tw \rangle = \langle v, w \rangle$ .

(b) Forneça um exemplo, se possível, de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  em  $V = \mathbb{R}^2$  tal que no espaço  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ , ângulo entre  $[1\ 0]^t$  e  $[0\ 1]^t$  não seja  $\frac{\pi}{2}$ .

**RESPOSTA:**

2a) Para  $x, y \in V$ , vale a relação

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle,$$

que é conhecida como a “Lei dos cossenos”. Ela pode ser obtida facilmente pelo cálculo:

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle.$$

Dela obtém-se que

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle.$$

Logo, por hipótese, temos

$$\begin{aligned} 4\langle Tx, Ty \rangle &= \|Tx + Ty\|^2 - \|Tx - Ty\|^2 = \|T(x + y)\|^2 - \|T(x - y)\|^2 \\ &= \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

2b) Pode-se definir um produto interno no espaço vetorial  $V = \mathbb{R}^2$  através de

$$\langle [x_1\ y_1]^t, [x_2\ y_2]^t \rangle_1 = [x_1\ y_1][A][x_2\ y_2]^t,$$

em que  $[A]$  é uma matriz  $2 \times 2$  real, simétrica e positivo-definida. Tomemos, por exemplo, para  $a > 0$ ,

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

Da definição de ângulo  $\theta$  entre dois vetores  $x$  e  $y$  no espaço vetorial  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ , temos

$$\cos \theta = \frac{\langle x, y \rangle_1}{\|x\| \|y\|}.$$

Para que o ângulo  $\theta$  entre  $[1\ 0]^t$  e  $[0\ 1]^t$  não seja  $\frac{\pi}{2}$ , basta que  $\langle [1\ 0]^t, [0\ 1]^t \rangle_1 = a > 0$ .

**3)** Seja a forma quadrática  $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

**(a)** Reconheça a cônica que  $Q(x_1, x_2, x_3) = 4$  representa.

**(b)** Determine o máximo do conjunto  $\{Q(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ .

**RESPOSTA:**

3a) Podemos escrever a forma quadrática como

$$Q(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{[M]} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $[M]$  tem três autovalores  $v_1, v_2$  e  $v_3$  normalizados (norma euclidiana igual a 1) sendo dois a dois ortogonais. Seja  $[P] = [v_1 \ v_2 \ v_3]$ , em que a  $j$ -ésima coluna é dada por  $v_j$ . Note que  $[P]$  diagonaliza  $M$ , isto é,  $[P]^t[M][P] = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , em que  $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  é a matriz quadrada diagonal, que tem em sua diagonal os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  de  $[M]$ .

Fazendo um cálculo, usando o polinômio característico de  $[M]$ , que é dado por  $x \mapsto -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ , vemos por inspeção que  $\lambda_1 = 1$ . As outras raízes de  $-x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = 0$  são  $\lambda_2 = 1$  (1 é portanto uma raiz dupla) e  $\lambda_3 = 4$ .

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

temos que a forma quadrática  $Q$  pode ser escrita como  $\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$ .

Note que se  $u = [u_1, u_2, u_3]^t$  e  $w = [w_1, w_2, w_3]^t$  são vetores do  $\mathbb{R}^3$ , então  $\langle u, w \rangle = \langle [P]u, [P]w \rangle$ . Então a mudança de coordenadas não altera a forma dos sólidos. Daí  $Q(x_1, x_2, x_3) = 4$  é um elipsoide em  $\mathbb{R}^3$ .

3b) Definindo  $x = [x_1, x_2, x_3]^t$  e  $y = [y_1, y_2, y_3]^t$ , temos

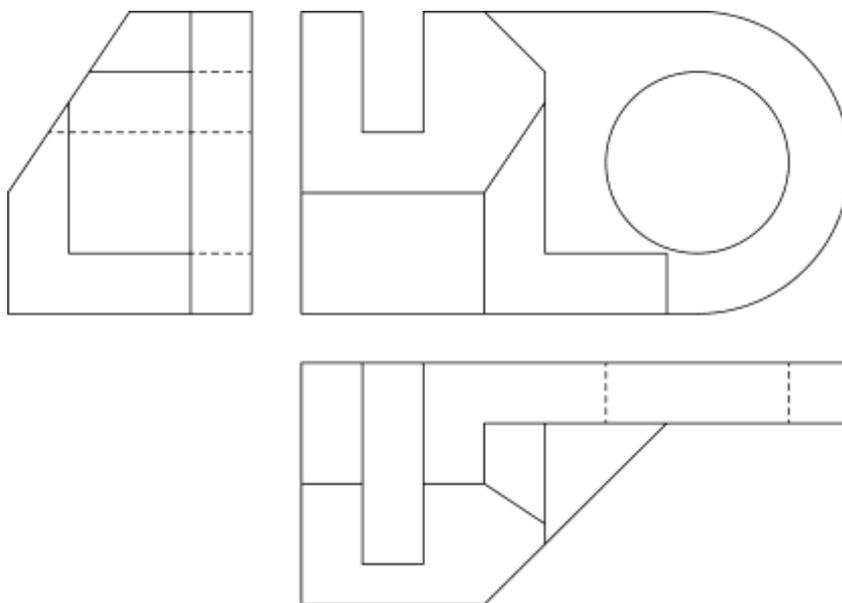
$$\langle [M]x, x \rangle = \langle [M][P]y, [P]y \rangle = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2.$$

Se  $\|x\| = 1$ , então  $\|y\| = 1$ , pois  $\langle u, w \rangle = \langle [P]u, [P]w \rangle$ , para quaisquer  $u, w \in \mathbb{R}^3$ . Assim,

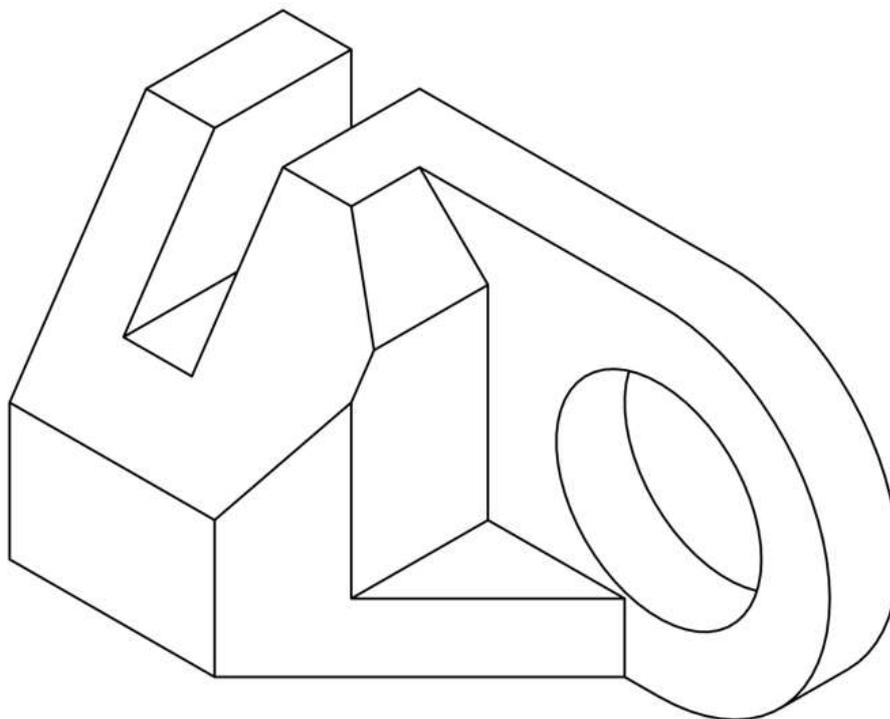
$$y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 \leq 4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 4,$$

que é atingido para o caso  $y_1 = y_2 = 0, y_3 = 1$ . Então, o máximo de  $Q(x_1, x_2, x_3)$  para  $\|x\| = 1$  é 4.

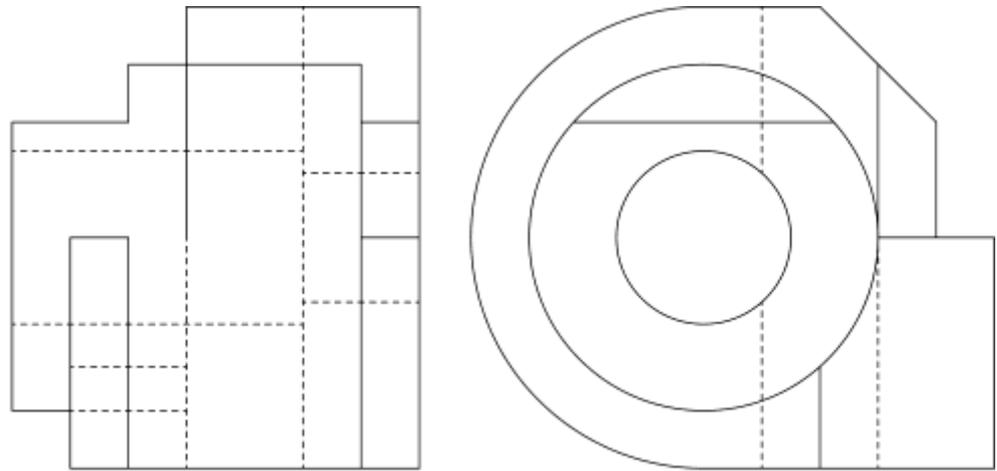
- 4) Desenhar a perspectiva isométrica simplificada da peça dada abaixo por suas vistas, representadas no primeiro diedro em escala natural. Desenhar a perspectiva em escala natural (1:1), tomando as medidas diretamente das vistas, e mostrando as faces frontal, superior e lateral direita.



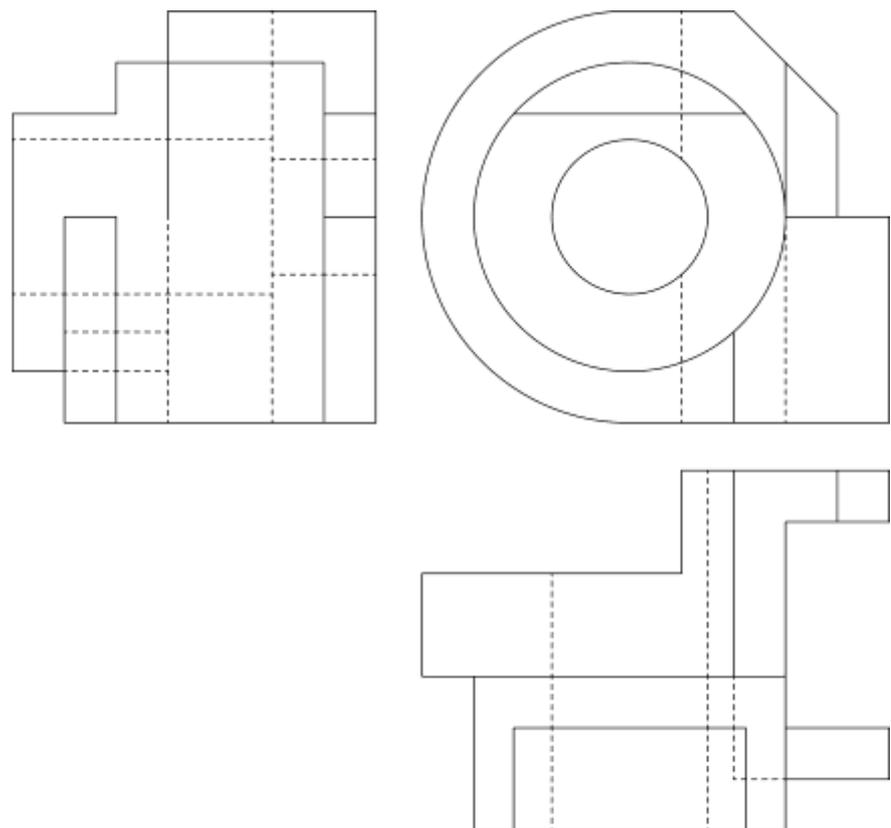
**RESPOSTA:**



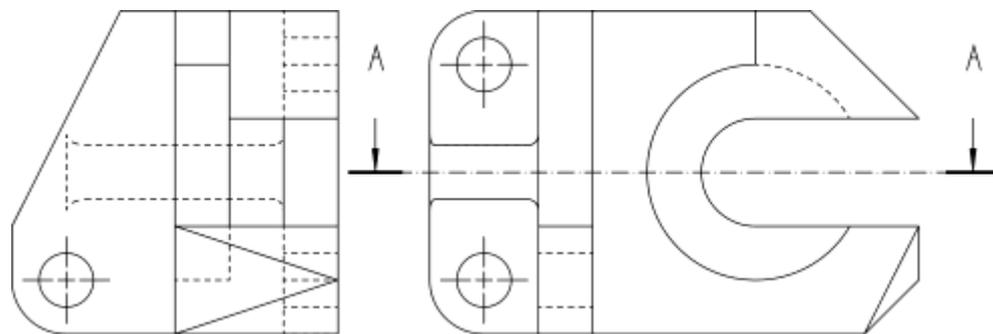
5) Dadas as vistas frontal e lateral direita de uma peça representadas no primeiro diedro, completar conjunto de vistas desenhando a vista superior na sua posição correta.



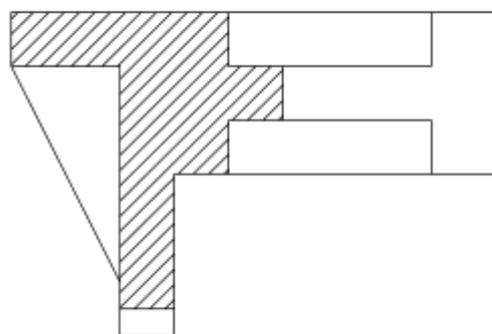
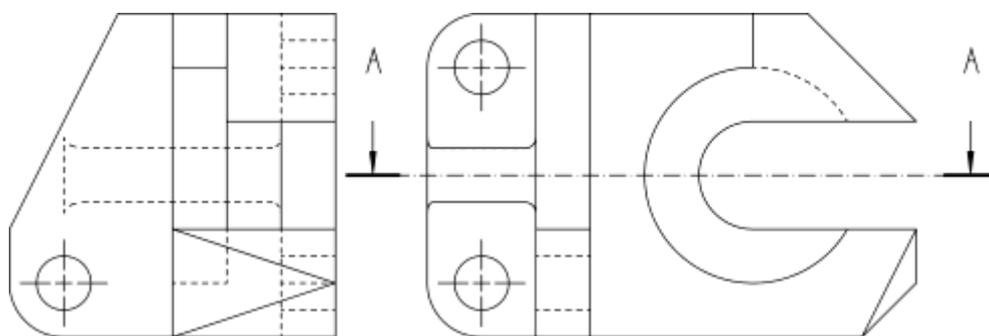
**RESPOSTA:**



- 6) Dadas as vistas frontal e lateral direita de uma peça representadas no primeiro diedro, desenhe a vista superior em corte AA, em sua posição correta.

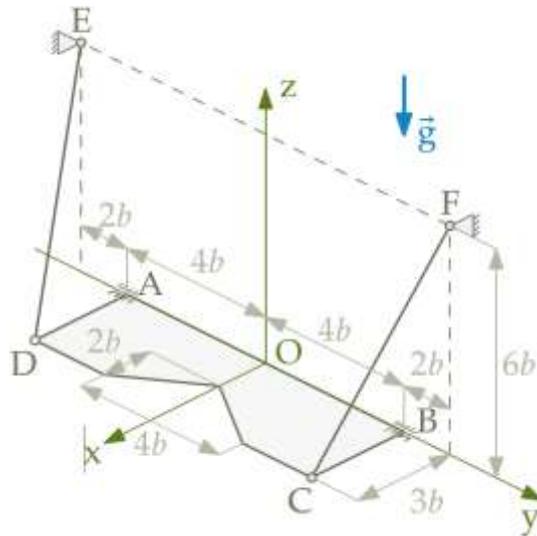


**RESPOSTA:**



CORTE A - A

- 7) Considere o modelo ilustrado na figura em que a placa homogênea ABCD de peso  $-P\vec{k}$  e geometria indicada encontra-se em equilíbrio sobre o plano horizontal  $xy$  vinculada por meio de anéis ideais posicionados nas extremidades A e B e por cabos ideais presos nos pontos D e C. Tais cabos estão ancorados nos pontos E e F, contidos no plano vertical  $yz$ . Pede-se:
- (a) As coordenadas do centro de massa G da placa.
  - (b) O diagrama de corpo livre da placa.
  - (c) As forças de tração nos cabos e as componentes de reação nos anéis.



**RESPOSTA:**

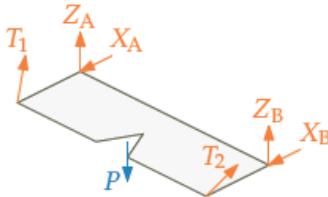
(a) Por simetria, o centro de massa da placa está localizado no eixo z, logo:

$$y_G = z_G = 0$$

A placa pode ser entendida como um retângulo homogêneo de área originalmente igual a  $A_0 = (3b)(8b) = 24b^2$  do qual se removeu um pedaço triangular de área  $A_t = (4b)(2b)/2 = 4b^2$ , resultando em uma figura de área  $A = A_0 - A_t = 20b^2$ . Assim:

$$x_G = \frac{A_0 x_0 - A_t x_t}{A_0 - A_t} = \frac{(24b^2) \frac{3b}{2} - (4b^2) \left(3b - \frac{2b}{3}\right)}{20b^2} \Rightarrow x_G = \frac{4}{3}b$$

(b) Diagrama indicado na figura abaixo:



(c) Considerando que as forças nos cabos são respectivamente paralelas aos cabos DE e CF, temos:

$$\vec{T}_1 = T_1 \frac{(E-D)}{|E-D|} = T_1 \left(-\frac{3}{7}\vec{i} - \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}\right), \quad \vec{T}_2 = T_2 \frac{(F-C)}{|F-C|} = T_2 \left(-\frac{3}{7}\vec{i} + \frac{2}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}\right)$$

Dessa forma, temos as seguintes equações de equilíbrio para a estrutura:

$$\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow X_A + X_B - \frac{3}{7}(T_1 + T_2) = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{2}{7}(T_2 - T_1) = 0 \\ \sum F_z = 0 \Rightarrow Z_A + Z_B + \frac{6}{7}(T_1 + T_2) - P = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \sum M_{Ox} = 0 \Rightarrow 4b \left[ Z_B - Z_A + \frac{6}{7}(T_2 - T_1) \right] = 0 \\ \sum M_{Oy} = 0 \Rightarrow -(3b) \frac{6}{7}(T_1 + T_2) + \frac{4}{3}bP = 0 \\ \sum M_{Oz} = 0 \Rightarrow 4b(X_A - X_B) + \left(4b \frac{3}{7} + 3b \frac{2}{7}\right)(T_2 - T_1) = 0 \end{array} \right.$$

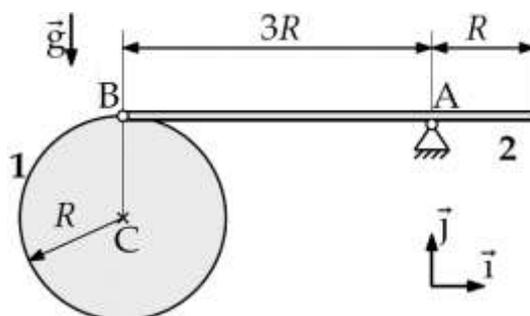
Resolvendo o sistema de equações, obtém-se:

$$T_1 = T_2 = \frac{7}{27}P$$

$$X_A = X_B = \frac{1}{9}P$$

$$Z_A = Z_B = \frac{5}{18}P$$

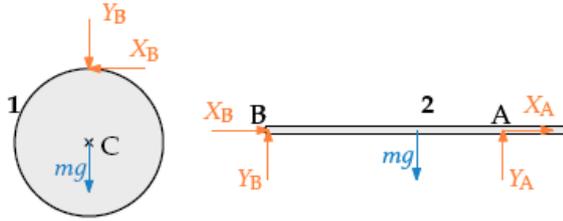
- 8)** Considere o sistema ilustrado na figura, em que os corpos **1** (disco de centro de massa  $C$ ) e **2** (barra de centro de massa  $G$ ) são vinculados entre si por meio de uma articulação ideal localizada na periferia de ambos, em  $B$ . Há ainda, em  $A$ , uma articulação que vincula a barra **2** a uma base fixa com respeito a um referencial inercial. Denote por  $\vec{\alpha}_1 = \alpha_1 \vec{k}$  e  $\vec{\alpha}_2 = \alpha_2 \vec{k}$  as respectivas acelerações angulares dos corpos **1** e **2**. Admita que os corpos são homogêneos e têm a mesma massa  $m$ . Para a configuração indicada na figura, em que as linhas  $AB$  e  $BC$  estão na horizontal e vertical, respectivamente, e admitindo que os corpos encontram-se inicialmente em *repouso*, pede-se, para o instante imediatamente após a liberação do sistema:
- (a)** Os diagramas de corpo livre dos corpos **1** (disco) e **2** (barra).
- (b)** As expressões das acelerações dos pontos  $G$  ( $\vec{a}_G$ ),  $B$  ( $\vec{a}_B$ ) e  $C$  ( $\vec{a}_C$ ) em função de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .
- (c)** Os valores de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .
- (d)** A força aplicada pela barra **2** sobre o disco **1** por meio da articulação em  $B$ .
- Dados:** Para o disco de centro  $C$ ,  $J_{Cz} = mR^2/2$ ; para a barra de centro de massa  $G$  e comprimento  $L$ ,  $J_{Gz} = mL^2/12$ .




---

**RESPOSTA:**

(a) Diagramas indicados na figura abaixo:



(b) Das equações de campo de acelerações, considerando que os corpos partem do repouso:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \alpha_2 \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{A}) - |\vec{\omega}_2|^2 (\mathbf{G} - \mathbf{A}) = \vec{0} + \alpha_2 \vec{k} \wedge (-R\vec{i}) + \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_C = -R\alpha_2 \vec{j}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha_2 \wedge (\mathbf{B} - \mathbf{A}) - |\vec{\omega}_2|^2 (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \vec{0} + \alpha_2 \vec{k} \wedge (-3R\vec{i}) + \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = -3R\alpha_2 \vec{j}}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \alpha_1 \wedge (\mathbf{C} - \mathbf{B}) - |\vec{\omega}_1|^2 (\mathbf{C} - \mathbf{B}) = -3R\alpha_2 \vec{j} + \alpha_1 \vec{k} \wedge (-R\vec{j}) + \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_C = R\alpha_1 \vec{i} - 3R\alpha_2 \vec{j}}$$

(c) Escrevendo as equações do Teorema da Resultante e do Teorema da Quantidade de Movimento Angular para ambos os corpos, temos:

$$\sum F_{1,x} = ma_{Cx} \Rightarrow -X_B = R\alpha_1$$

$$\sum F_{1,y} = ma_{Cy} \Rightarrow -Y_B - mg = m(-3R\alpha_2)$$

$$\sum M_{1,Cz} = J_{Cz}\alpha_1 \Rightarrow RX_B = \frac{1}{2}mR^2\alpha_1$$

$$\sum F_{2,x} = ma_{Cx} \Rightarrow X_A + X_B = 0$$

$$\sum F_{2,y} = ma_{Cy} \Rightarrow Y_A + Y_B - mg = m(-R\alpha_2)$$

$$\sum M_{2,Cz} = J_{Cz}\alpha_2 \Rightarrow RY_A - 2RY_B = \frac{1}{12}m(4R)^2\alpha_2$$

Resolvendo o sistema de equações, obtém-se:

$$\boxed{\alpha_1 = 0}$$

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{6}{17} \frac{g}{R}}$$

(d) Também da resolução do sistema de equações do item anterior, obtém-se:

$$\boxed{X_B = 0}$$

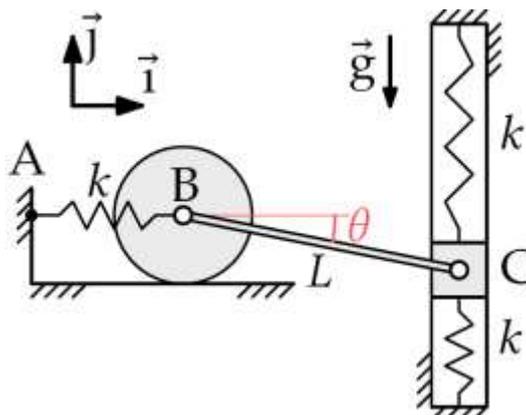
$$\boxed{Y_B = \frac{1}{17}mg}$$

9) O sistema ilustrado na figura é constituído por um disco homogêneo de centro B, massa  $m$  e raio  $R$  e momento de inércia central  $J_{Bz} = mR^2/2$ , que pode *rolar sem escorregar* sobre uma superfície plana horizontal, vinculado a um bloco C de massa  $m$ , que pode deslizar *sem atrito* em uma guia vertical, por meio de uma barra BC de *massa desprezível* e comprimento  $L$ , articulada em suas extremidades B e C. O ângulo entre a barra BC e a horizontal medido no sentido horário é igual a  $\theta$ . Sabe-se que na configuração  $\theta = 0$  as três molas lineares de constante  $k$  indicadas estão relaxadas. Pede-se:

(a) Determinar o centro instantâneo de rotação da barra BC, a velocidade  $\vec{v}_C$  do bloco C e o vetor rotação  $\vec{\omega}$  do disco, em função de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

(b) As expressões da energia cinética ( $T$ ) e da energia potencial ( $V$ ) do sistema em função de  $\theta$  e  $\dot{\theta}$ .

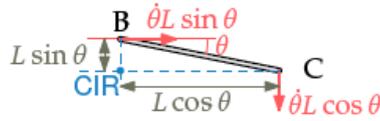
(c) A expressão de  $\dot{\theta}$  em função de  $\theta$  admitindo que o sistema parta do repouso da configuração  $\theta = 0$ .




---

**RESPOSTA:**

- (a) A determinação do centro instantâneo de rotação (CIR) da barra pode ser feita a partir da intersecção das linhas perpendiculares às direções de movimento conhecidas de suas extremidades B (horizontal) e C (vertical), conforme ilustrado na figura abaixo:



As magnitudes das velocidades dos pontos B e C podem ser obtidas a partir do produto da velocidade angular  $\dot{\theta}$  da barra pelas respectivas distâncias destes pontos ao CIR, de onde se conclui que:

$$\vec{v}_B = +\dot{\theta}L \sin \theta \vec{i} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{v}_C = -\dot{\theta}L \cos \theta \vec{j}}$$

Como o disco rola sem escorregar sobre uma superfície fixa, então:

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\vec{v}_B|}{R} = \frac{L}{R} \dot{\theta} \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = -\frac{L}{R} \dot{\theta} \sin \theta \vec{k}}$$

- (b) A expressão da energia cinética do sistema pode ser obtida a partir da soma das energias cinéticas do disco e do bloco:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{v}_B|^2 + \frac{1}{2} J_{Bz} |\vec{\omega}|^2 + \frac{1}{2} m |\vec{v}_C|^2 = \frac{1}{2} m (\dot{\theta} L \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} m R^2 \right) \left( \frac{L}{R} \dot{\theta} \sin \theta \right)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\theta} L \cos \theta)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)}$$

A expressão da energia potencial pode ser obtido pela soma da energia potencial gravitacional e da energia potencial elástica de cada uma das três molas, cujas deflexões com respeito à posição relaxada são, respectivamente  $x_1 = L(1 - \cos \theta)$ ,  $x_2 = L \sin \theta$  e  $x_3 = -L \sin \theta$ :

$$V = mgh_C + \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k x_3^2 = mg(-L \sin \theta) + \frac{1}{2} k L^2 (1 - \cos \theta)^2 + \frac{1}{2} k L^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} k L^2 \sin^2 \theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V = -mgL \sin \theta + \frac{1}{2} k L^2 (3 - 2 \cos \theta - \cos^2 \theta)}$$

- (c) Considerando que a energia mecânica do sistema  $= T + V$  se preserva e que, no instante inicial  $E = T + V = 0$ , uma vez que  $\theta = 0$  e  $\dot{\theta} = 0$ , tem-se, para uma configuração genérica:

$$\frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) - mgL \sin \theta + \frac{1}{2} k L^2 (3 - 2 \cos \theta - \cos^2 \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{mgL \sin \theta - \frac{1}{2} k L^2 (3 - 2 \cos \theta - \cos^2 \theta)}{\frac{1}{2} m L^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right)}}$$